**Der Spaltenraum der Matrix A enthält alle Vektoren A·x; Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor; Standardweg: Skalarprodukt; Vektorweise Multiplikation; Spaltenraum und Rang einer Matrix; Lineare Unabhängigkeit; Zeilenraum einer Matrix; Matrixmultiplikation**

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

**Das Zinsvorzeichen**

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

# Inhaltsverzeichnis



# Der Spaltenraum der Matrix A enthält alle Vektoren A·x

## Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Wie multipliziert man eine Matrix mit einem Vektor?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Man kann dabei über die *Zeilen* und die *Spalten* nachdenken.

## Standardweg: Skalarprodukt

Der Standardweg der Multiplikation ist die Zeilen von $A$ mit dem Vektor $x$ zu multiplizieren (Skalarprodukt):

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

## Vektorweise Multiplikation

Der andere Weg ist die *vektorweise Multiplikation*:

$$Ax = x_1 \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass das Ergebnis das gleiche ist und dass es nur eine andere Art ist, es aufzuschreiben. $Ax$ ist also in dieser Schreibweise eine lineare Kombination der Spalten von $A$.

## Spaltenraum und Rang einer Matrix

*Der nächste Schritt ist, über alle möglichen Kombinationen der Spalten von $A$ nachzudenken. Das Ergebnis $Ax$ heißt Spaltenraum* $\mathrm{Col}(A)$.

Für das letzte Beispiel ist der Spaltenraum eine Hyperebene. Das nächste Beispiel mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

hat einen eindimensionalen (1D) Spaltenraum, weil die dritte Spalte von $A$ die Summe der ersten beiden Spalten ist. Man sagt dann, dass der Rang der Matrix $1$ ist:

$$\text{rg}(A) = 1.$$

*Der Rang* $\text{rg}(A)$ *einer Matrix* $A$ *ist die Dimension des Spaltenraums* $\text{Col}(A)$*. Die Dimension des Spaltenraums ist die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\,3\,8) = uv^T$$

Das sieht ein wenig „seltsam" aus, aber die Konstituenten der Rechnung haben die korrekten Dimensionen:

$$\mathbb{R}^{3\times 1}\mathbb{R}^{1\times 3} = \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Betrachtet man wieder die Matrix $A$, so sieht man, dass die dritte Spalte eine Linearkombination der ersten beiden Spalten ist. Nur zwei Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Daher ist die Dimension des Spaltenraums $2$.

### Lineare Unabhängigkeit

Nun suchen wir eine Basis für den Spaltenraum. Eine Basis besteht aus linear unabhängigen Vektoren, mit denen der Spaltenraum aufgespannt wird. Sei $C$ diese Basis mit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nun sucht man eine dritte Matrix $R$, so dass

$$A = CR.$$

$R$ findet sich durch Vergleich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man findet hier den wichtigen Satz der linearen Algebra, dass der *Spaltenrang* gleich dem *Zeilenrang* ist, dessen Beweis im Folgenden skizziert wird.

### Zeilenraum einer Matrix

Der *Zeilenraum* einer Matrix $A$ besteht in allen Linearkombinationen von Zeilenvektoren.

*Der Zeilenraum einer Matrix $A$ ist der Spaltenraum der transponierten Matrix* Col$(A^T)$.

Die Spalten der Matrix $C$ enthalten eine Basis für den Spaltenraum von $A$. Es wird nun gezeigt, warum die Zeilen der Matrix $R$ eine Basis für den Zeilenraum von $A$ bilden, indem man einfach die Matrixmultiplikation betrachtet

$$A = CR$$

und die Identität feststellt. Die Matrix $R$ heißt auch die zeilenreduzierte „Echelon-Form" der Matrix $A$, auch Stufen- oder Treppennormalform.

Eine weitere Feststellung besagt, dass nicht nur $Ax$ im Spaltenraum ist, sondern auch $ABCx$, denn

$$ABCx = A(BCx)$$

und $BCx$ ist ein Spaltenvektor, weswegen sein Produkt mit $A$ wieder im Spaltenraum von $A$ liegen muss.

### Matrixmultiplikation

Wir berechnen $AB$ auf die zwei unterschiedlichen Weisen. Die Standardmethode besteht darin für die Komponenten der Ergebnismatrix die dem Zeilenindex der Komponent entsprechende Zeile von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zu nehmen und diese mit der dem Spaltenindex entsprechenden Spalte von $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ skalar zu mulitplizieren:

$$D = AB = \begin{pmatrix} \sum_k A_{1k}B_{k1} & \sum_k A_{1k}B_{k2} & \sum_k A_{1k}B_{k3} \\ \sum_k A_{2k}B_{k1} & \sum_k A_{2k}B_{k2} & \sum_k A_{2k}B_{k3} \\ \sum_k A_{3k}B_{k1} & \sum_k A_{3k}B_{k2} & \sum_k A_{3k}B_{k3} \end{pmatrix},$$

wobei $k \in \{1,\ldots,n\}$. Für ein Element der Ergebnismatrix ergibt sich

$$D_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = (A_{i1} \cdots A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix},$$

Mit der hier vorgestellten, zweiten Methode wird eine Spalte von $A$ mit einer Zeile von $B$ multipliziert, wobei man eine Matrix erhält und nicht mehr ein Skalar:

$$D = \sum_k \tilde{D}_k = \sum_k \begin{pmatrix} A_{1k}B_{k1} & A_{1k}B_{k2} & A_{1k}B_{k3} \\ A_{2k}B_{k1} & A_{2k}B_{k2} & A_{2k}B_{k3} \\ A_{3k}B_{k1} & A_{3k}B_{k2} & A_{3k}B_{k3} \end{pmatrix}.$$

Die Ergebnismatrix $D$ ergibt sich dabei aus einer Summe über äußere Produkte:

$$\tilde{D}_k = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ \vdots \\ A_{nk} \end{pmatrix} \left( B_{k1} \cdots B_{kn} \right)$$

# Index