Lotka-Volterra-Gleichungen; Differenzialgleichungssystem; Stabiler Punkt; Invariante der Populationszahlen; Lotka-Volterra-Gleichungen in der Physik des LASERs

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Lotka-Volterra-Gleichungen

Ein für die Modellierung vieler Prozesse nützliches mathematisches Modellsystem wird durch die sogenannten Lotka-Volterra-Gleichungen (LVG) gebildet. Dieses Modellsystem erscheint in unterschiedlichen Bereichen der Naturwissenschaften.

Die LVG sind ein Speziallfall der sogenannten Ratengleichungen, mit denen thermodynamisch und chemische Prozesse mathematisch modelliert werden können. Unter Gleichgewichtsbedingungen des mit den Ratengleichungen beschriebenen Prozesses erhält man das sogenannte Massenwirkungsgesetz der Stöchiometrie.

Differenzialgleichungssystem

Die Lotka-Volterra Gleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1 = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2 = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2. \quad (2)$$

Um ein Gefühl für die Rolle der Koeffizienten ε_i und γ_i zu bekommen ist es nützlich, die LVG in der wohl bekanntesten Anwendung zu diskutieren.

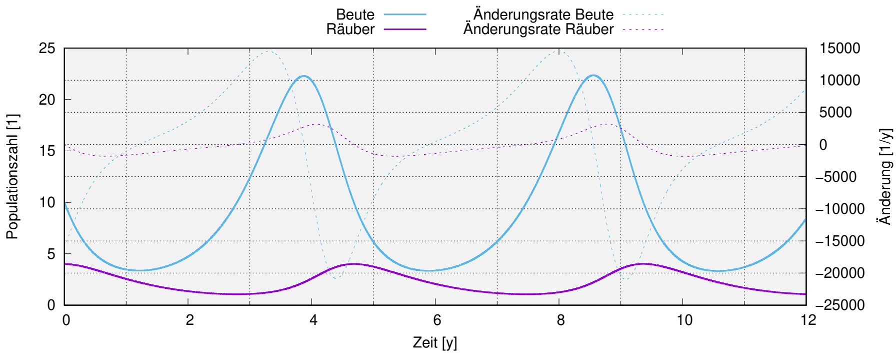

Abbildung 1: Räuber-Beute Population mit den Parametern: $\varepsilon_1 = 2$ (natürliche jährliche Vermehrungs-Rate Beute), $\varepsilon_2 = 1$ (natürliche jährliche Sterbe-Rate Räuber) , $\gamma_1 = 0.9$ (begegnungsbedingte Sterbe-Rate Beute) und $\gamma_2 = 0.1$ (begegnungsbedingte Vermehrungs-Rate Räuber). Horizontale Achse (Zeit in Jahren), vertikale Achse Populations-Zahl und -Änderung, y englisch für Jahr.

In der theoretischen Biologie modellieren die LVG die zeitliche Entwicklung von Populationszahlen zweier Spezies, wie z.B. der Anzahl Räuber- und Beutetiere in einem räumlich isolierten Gebiet (Räuber-Beute-Modell). Im Räuber-Beute Modell vermehrt sich die Anzahl der Beutetiere N_1 exponenziell mit der **Vermehrungsrate** ε_1, wenn es keine Räubertiere (Anzahl

$N_2 = 0$) gibt. Gibt es jedoch Räuber, gilt also $N_2 > 0$, dann hängt die Dezimierung der Beute durch die Räuber von der

$$\text{Begegnungswahrscheinlichkeit} \propto N_1 N_2$$

ab.

Die Begegnungswahrscheinlichkeit ist also proportional (Symbol $\propto$) zum Produkt der Populationszahlen N_1 und N_2. Die Dezimierungsrate ist $\gamma_1 N_2$, also je größer umso mehr Räuber es gibt. Gibt es keine Beute $N_1 = 0$, dann können sich die Räuber nicht vermehren und sterben mit einer Extinktionsrate von ε_2 aus. Gibt es Beutetiere für die Räuber, dann vermehren sich die Räuber mit einer Rate von $\gamma_2 N_1$.

Stabiler Punkt

Fasst man die Raten für die Vermehrung, die Extinktion und die Dezimierung zusammen, dann kann man die LVG auch umformen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_2 = N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1). \tag{4}$$

In dieser Formulierung ist nun deutlich zu erkennen, dass die Vermehrung der Beute durch die Präsenz und proportional zur Anzahl Räuber gehemmt wird und umgekehrt das Aussterben der Räuber entsprechend der Präsenz und Anzahl der Beutetiere. Sucht man nach einem stabilen Zustand, setzt man also die Änderungen der Populationszahlen gleich null:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhält man den Punkt

$$\begin{pmatrix} N_1^{\text{stabil}} \\ N_2^{\text{stabil}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \end{pmatrix},$$

an dem die Populationszahlen konstant sind.

Invariante der Populationszahlen

Die Trajektorie der Zeitentwicklung des Räuber-Beute-Systems befindet sich im ersten Quadranten eines zweidimensionalen Koordinatensystems. Sucht man für die Menge zeitlich nacheinander folgender Koordinaten eine Invariante $f(N_1, N_2)$, so muss für sie gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(N_1, N_2) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}N_1}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}N_2}\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Für die zeitlichen Ableitungen setzt man die rechte Seite der LVG ein und erhält:

$$0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}N_1} N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}N_2} N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$$

Durch Elimination von $\mathrm{d}f$ (Regel von L'Hospital) und Sortierung nach Thermen mit N_1, $\mathrm{d}N_1$, N_2, $\mathrm{d}N_2$ (Trennung der Veränderlichen) und anschließende Integration erhält man:

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)\frac{\mathrm{d}N_1}{N_1} = \int_{N_2(0)}^{N_2(t)} (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)\frac{\mathrm{d}N_2}{N_2} \tag{5}$$

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(t)} \left(\frac{\varepsilon_2}{N_1} - \gamma_2\right)\mathrm{d}N_1 = \int_{N_2(0)}^{N_2(t)} \left(\frac{\varepsilon_1}{N_2} - \gamma_1\right)\mathrm{d}N_2 \tag{6}$$

$$\left[\varepsilon_2 \log(N_1) - \gamma_2 N_1\right]_{N_1(0)}^{N_1(t)} = \left[\varepsilon_1 \log(N_2) - \gamma_1 N_2\right]_{N_2(0)}^{N_2(t)} \tag{7}$$

Sortiert man nun noch die zeitabhängigen Populationszahlen auf die eine Seite und die Populationszahlen zum Zeitpunkt 0 auf die andere Seite der Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned} f(N_1,N_2) &= \varepsilon_2 \log(N_1(t)) - \gamma_2 N_1(t) - \varepsilon_1 \log(N_2(t)) + \gamma_1 N_2(t) && (8)\\ &= \varepsilon_2 \log(N_1(0)) - \gamma_2 N_1(0) - \varepsilon_1 \log(N_2(0)) + \gamma_1 N_2(0) && (9)\\ &= \text{const.}, && (10) \end{aligned}$$

und die Invariante ist gefunden.

Lotka-Volterra-Gleichungen in der Physik des LASERs

In der Physik beschreibt eine spezielle Version der LVG die sogenannte Besetzungsinversion in einem Laser. Übertragen auf das Räuber-Beute-Modell der Populationsdynamik lässt sich die Beute als die Anzahldichte der angeregten elektronischen Zustände in einem (z.B. optisch) „gepumptem“ Material beschreiben, wohingegen die Räuber die im Resonator des Lasers befindlichen/eingekoppelten Photonen sind. Die Koeffizienten des LVG Modells sind bei den Ratengleichungen des Lasers die Einstein-Koeffizienten der spontanen und stimulierten Emission sowie der Absorption.

Index